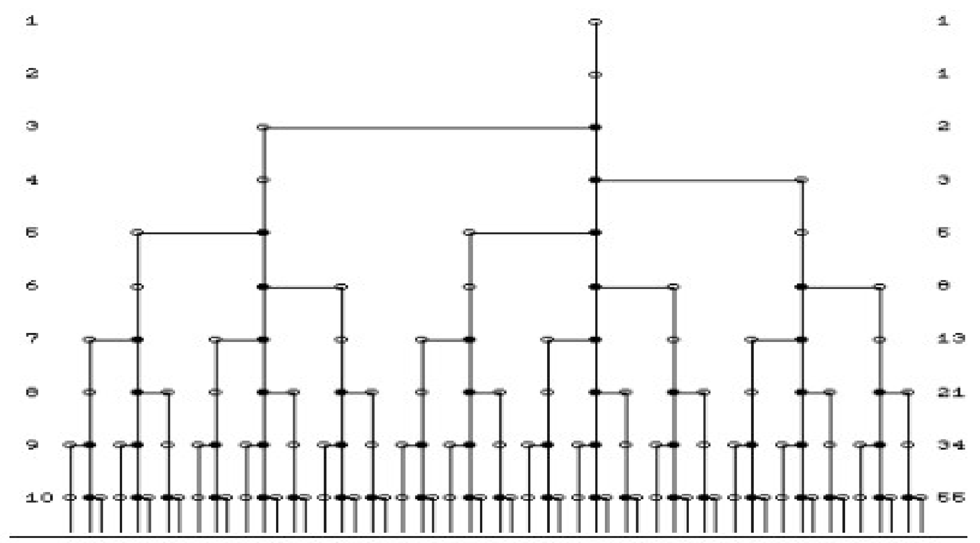
İKİLİ TEKRARLI DİZİLER

Selçuk DEMİRTAŞ
18025038
Tez Danışmanı: Doç.Dr. Murat ALAN

ÖZET

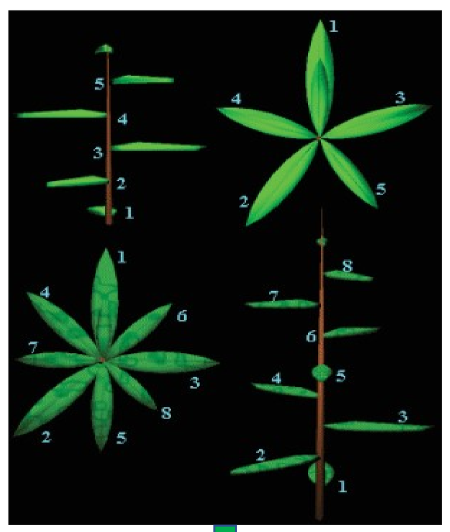
Bu çalışma, İkili Tekrarlı Dizilerin temel tanım ve teoremlerini ele almak amacıyla hazırlanmıştır. Sırasıyla; Leonardo Fibonacci'nin yaşam hayatı, tavşan problemleri, Fibonacci ve Lucas sayılarının rekürans bağıntısı ve Binet formülleri, Fibonacci ve Lucas özdeşlikleri, F_n ve L_n 'deki basamak sayısı ve ilgili teoremleri anlatılmıştır.

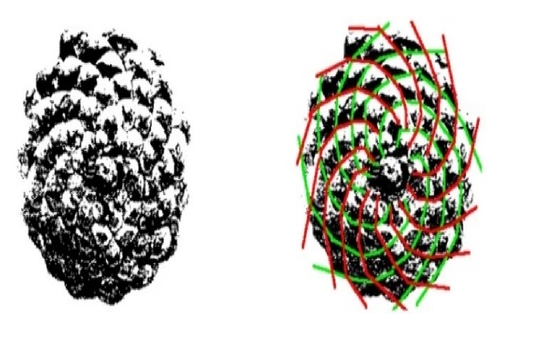
Tavşan Problemleri
''Dört yanı duvarlarla çevrili bir yere bir çift tavşan konmuştur. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan yavruladığı, her yeni çiftin de erginleşmesi ve üreyebilmesi için bir ay geçtiği ve de tavşanların ölmediği varsayılarak, 100 ay sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?'' Bu şekilde düşünüldüğünde tavşan çiftleri sayısı aylara göre şu sıralamayı kaydetmektedir : 1,1,2,3,5,8,13,21,...Görüldüğü üzere ilk iki sayı hariç, her sayı kendisinden önce gelen iki sayının toplamına eş gelmektedir. Tavşanlar aşağıda verilen grafikteki gibi artış göstermektedir.



Ardışık iki Fibonacci sayısının oranının limiti bize altın oranı verir. $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$'dir.

Doğada Fibonacci Dizisi
Fibonacci sayılarına doğada sık rastlamaktayız. Bu sayılar bitki yaprakları, bitki tohumları, çiçek yaprakları ve kozalaklarda sıkça karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca bu sayılara DaVinci'nin resimlerinde, Pascal ve Binom Üçgeninde, Mimar Sinan'ın eserlerinde de rastlanmaktadır.





Eğrelti yaprakların dizilişindeki Fibonacci dizisi ise, bitkinin güneşten ve havadaki karbondioksitten maximum düzeyde faydalanmasını sağlayarak, optimum düzeyde fotosentez yapmasına olanak verir.

Çam kozalağı üzerindeki taneler kozalağın altındaki sabit bir noktadan kozalağın tepesindeki başka sabit bir noktaya doğru spiraller oluşturarak çıkarlar. İşte bu taneler soldan sağa ve sağdan sola sayıldığında çıkan sayılar, Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir

İkili Tekrarlayan Diziler

Tanım **:** Bir dizide bir terim kendinden önceki terimler aracılığıyla hesaplanıyorsa, bu diziye rekürans (tekrarlama, indirgeme) dizisi denir. Bu terimi hesaplarken kullanılan bağıntıya ise rekürans bağıntısı denir.

Tanım:$\forall n \geq k$, sabit a_j $(0 \leq j \leq k-1)$ ve $a_0 \neq 0$ katsayıları için, $u_{n=}a_{k-1}u_{n-1} + a_{k-2}u_{n-2} + \cdots + a_1 u_{n-k+1} + a_0 u_{n-k}$ Eşitliğini sağlayan (u_n) dizisine k.dereceden homojen lineer rekürans dizi denir. Buradaki eşitliğe ise k. dereceden lineer homojen rekürans bağıntı denir. Bu dizinin $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ biçiminde olan ilk k terimine (u_n) dizisinin başlangıç koşulları denir.

Tanım : A bir $n \times n$ matrisi, I birim matris ve c bir sayı olmak üzere $det(cI-A)$'nın açılımından elde edilen c değişkenli polinoma karakteristik polinom denmektedir. a_k≠0 olduğunu varsayalım (eğer değilse $(u_n)_{n\geq 0}$ dizisi k' dan küçük bir doğrusal yinelemeyi karşılar). Eğer $a_1 \ldots \ldots \ldots a_k \,\varepsilon\, \mathbb{Z}$ ve $u_0 \ldots\ldots u_{k-1} \,\varepsilon\, \mathbb{Z}$ ise ∀ n≥0 için n üzerinde tümevarım yoluyla u_n için bir tamsayı olduğunu elde ederiz. Polinom $f(X) = X^k - a_1 X^{k-1} - \cdots - a_k \,\varepsilon\, \mathbb{C}[X]$ olur. Karakteristik polinom $(u_n)_{n\geq 0}$ olarak adlandırılır.

İkili Tekrarlayan Dizi Örnekleri

Fibonacci Dizisi: ∀ n ≥ 0 için $F_0 = 0, F_1 = 1 \; ve \; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ile şeklinde tanımlanan $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Fibonacci dizisi denmektedir. Bu eşitlik sabit katsayılı 2.mertebeden bir lineer fark denklemidir. $(F_n)_{n\geq 0}$ Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi;

$$f(X) = X^2 - X - 1 = (X-\alpha)(X-\beta)$$

Burada karakteristik denkleme ait kökler ise sırasıyla $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ ve$\beta = (1-\sqrt{5})/2$ 'dir.

$F_n = \frac{a^n - \beta^n}{a - \beta}$ olup buna Fibonacci sayısının n.terimi için Binet Formülü denir. Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu ise $\sum_{n=0}^{\infty} F_n X^n = \frac{1}{1-X-X^2}$'dir.

Lucas Dizisi:∀ $n \geq 0$ ve $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ile $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ şeklinde tanımlanan $(L_n)_{n\geq 0}$ dizisi bir Fibonacci dizisiyle alakalı ise bu diziye Lucas dizisi denir. Bu dizi Fibonacci dizisiyle aynı karakteristik denkleme sahiptir.

Lucas sayılarına ait binet formülü $L_n = a^n + \beta^{n'} dir$. Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu ise $\sum_{n=0}^{\infty} L_n X^n = \frac{2-X}{1-X-X^2}$'dir.

Fibonacci ve Lucas Özdeşlikleri

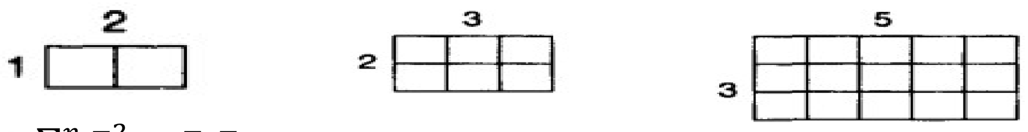
TEOREM: $\sum_1^n F_i = F_{n+2} - 1$

TEOREM: $\sum_1^n \mathrm{F}_{2i-1} = \mathrm{F}_{2n}$

TEOREM: $\mathrm{F}_{n-1}\,\mathrm{F}_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ Cassini'nin formülünün sonucu olarak ardışık iki fibonacci sayısı asaldır. Yani $\forall n \geq 0$ için $(F_{n+1}, F_n) = 1$'dir.

TEOREM: $F_m^2 + F_{m+1}^2 = \mathrm{F}_{2m+1}$. İlk n Fibonacci sayısının kareleri toplamı hakkında ne söyleyebiliriz? Bir model arayalım; $F_1^2 + F_2^2 = 2 = F_2 F_3$

Örneğin: Bunun sonucunun güzel bir geometrik yorumlaması vardır. $F_1 \times F_1$ ve $F_2 \times F_2$ boyutundaki karelerin alanları toplamı $F_2 \times F_3$ şeklindeki dikdörtgenin alanına eşittir. Aynı şekilde, $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1 + 1 + 4 = 6 = 2.3 = F_3 F_4$ ve $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1 + 1 + 4 + 9 = 15 = 3.5 = F_4 F_5$. Bu sonuçlarda aşağıda gösterildiği gibi geometrik olarak benzer şekilde yorumlanabilir.



TEOREM: $\sum_1^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$

TEOREM: ABC; AC=$F_k F_{k+3}$, BC=$2F_{k+1}F_{k+2}$ ve AB=F_{2k+3} ile üçgen oluştursun. O zaman ABC, C'de dik açılı bir Pisagor üçgenidir.

Bir sonraki örnek $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ özdeşliğinin iyi bir örneğidir.

ÖRNEK:Öyle ki $a_n = F_{n+2}$ olup n-bitlik kelimeler ardışık iki 1 içermez. Bitleri doğrusal olarak düzenlemek yerine, onları bir daire etrafına iki bitişik bit 1 olmayacak şekilde düzenlediğimizi varsayalım. ∀ $n \geq 2$ için b_n, bu tür düzenlemelerin sayısını göstersin. Böylece b, n-bitlik kelimelerin sayısını şu şekilde ifade eder:

1)Hiçbir bitişik bit 1 değildir.

2)Kelime 1 ile başlıyorsa 1 ile bitemez.

n	İstenen tipin n-bit kelimeleri	b_n
2	00, 01,10	3
3	000, 001, 010, 100	4
4	0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 0101, 1010	7
5	00000, 00001, 00010, 00100, 01000, 10000, 01010, 01001, 10010, 00101	11

L_n

Bunu belirlemek için, sözcüğün 0 ile bittiğini varsayalım. Kriterleri karşılayan $a_{n-1} = F_{n+1}$ ikilisi vardır. Diğer taraftan n.bitin 1 olduğunu varsayalım. O halde (n-1) ve 1.bit 1 olamaz. Sırasıyla 1.bit(0),........,n-1.bit(0),n.bit(1)olsun. Kalan n-3 bit, istenen tipte $a_{n-3} = F_{n-1}$ kelimeleri oluşturmak için kullanılabilir. Bu sebeble ∀ $n \geq 2$ için $b_n = a_{n-1} + a_{n-3} = F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$.

F_n VE L_n 'DEKİ BASAMAK SAYISI

Binet formülü F_n ve L_n'deki basamak sayısını önceden belirlemek için başarıyla kullanılabilir.

Bunu F_n yazarak gösterebiliriz. $F_n = \frac{a^n}{\sqrt{5}}\left[1 - \left(\frac{\beta}{a}\right)^n\right]$, $|\beta| < |a|$, n⟶ ∞ iken $\left(\frac{\beta}{a}\right)^n \longrightarrow 0$. Bu nedenle n yeterince büyük olduğunda,

$F_n \approx \frac{a^n}{\sqrt{5}}$ olup $logF_n \approx nloga - (log5)/2$'dir. F_n'deki basamak sayısı; $F_n = 1 + karakteristik\ logF_n = [log\ F_n] = [n\ loga - (log5)/2]$=$[n[\log(1+\sqrt{5}) - log2] - (log5)/2]$'dir.

Örneğin F_{30}'daki basamak sayısı şu şekilde verilir. =$[30[\log(1+\sqrt{5}) - log2] - (log5)/2] = [5.92014420533] = 6\ 'dır. F_{30} = 832{,}040$ 'ın gerçekten altı rakam içerdiğine dikkat edin.

$L_n = a^n + b^n$ olduğundan, yeterince büyük n için $L_n \approx a^n$ böylece $L_n \approx n\ loga$ olur. L_n'deki basamak sayısı; $[\log L_n] = [\mathrm{n} \log a] = [n(\log(1+\sqrt{5}) - log2)]$.Örneğin, $L_{39} = [39(\log(1+\sqrt{5}) - log2)] = 9$ basamak içerir aynı şekilde $L_{50} = [50(\log(1+\sqrt{5}) - log2)] = 11$ basamak içerir

TEOREM:(Catalan,1879) $\forall n \geq k$ için k bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2$$

TEOREM: Pozitif bir tamsayı, yalnızca $5n^2 \pm 20$ mükemmel bir kare ise Lucas sayısıdır.

TEOREM: $k \geq 1$ ve j herhangi bir tamsayı olsun.

$$\sum_{i=0}^{n} F_{ki+j} = \begin{cases} \frac{F_{nk+k+j} - (-1)^k F_{nk+j} - F_j - (-1)^j F_{k-j}}{L_k - (-1)^k - 1} & eğer\ j < k \\ \frac{F_{nk+k+j} - (-1)^k F_{nk+j} - F_j + (-1)^k F_{j-k}}{L_k - (-1)^k - 1} & \text{aksi halde} \end{cases}$$

KAYNAKÇA

[1] Pure and Applied Mathematics A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs and Tracts Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Thomas Koshy

[2] Effective Methods For Dıophantıne Equatıons (Dıophantıne Equatıons) Florian Luca (Unıversidad Nacional Autonoma de Mexico)

[3] Altın Oran Sitesi(2002). https://www.metu.edu.tr/~e115152/project/ındex.htm (12 Mart 2004)

[4] School Of Mathematical and Computational Sciences University of St Andrews(1998)

[5] Fibonacci Dizileri ve Fibonacci Matrislerinin Determinantları, Normları(Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi)

[6] https://www.slideshare.net/matematikcanavari/fibonacci-ve-tavan-problemi